

Pochodna funkcji

21 października 2018

1 Wstęp

Zakładamy, że f - funkcja określona na zbiorze $\mathbf{X}$ przyporządkowująca każdemu elementowi x tego zbioru wartość y ze zbioru $\mathbf{Y}$, czyli przyporządkowanie $y = f(x)$.

Dla przykładu zajmijmy się funkcją $f(x) = x^2$, gdzie $\mathbf{X} = \mathbb{R}$.

2 Pochodna funkcji

Pochodną funkcji $\frac{df}{dx}$ (lub skrótowo $f'(x)$) z definicji definiujemy jako:

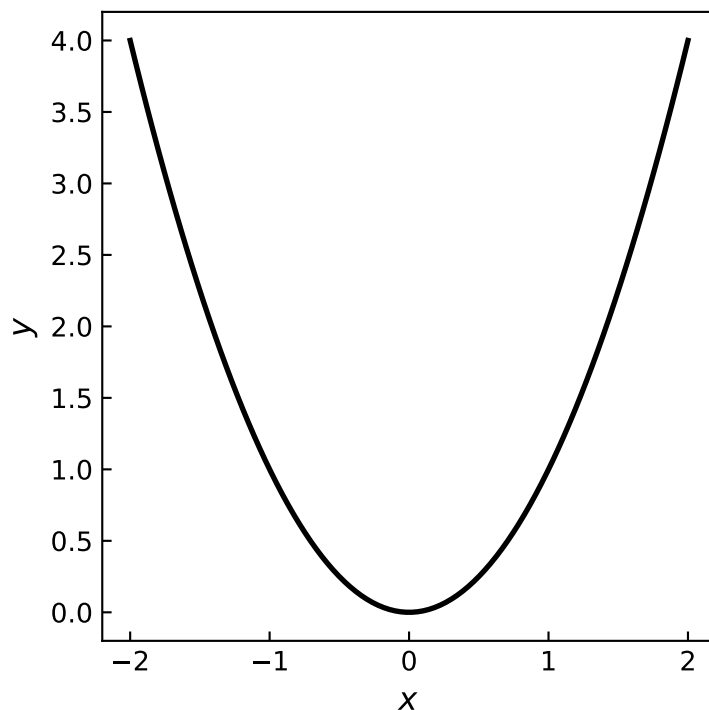
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

Jest to matematyczny zapis stosunku zmiany wartości funkcji f do zmiany jej argumentu x w punkcie x (pochodna funkcji jest inną funkcją). Ten stosunek znany już z funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, jest on zawsze równy a , niezależnie od wyboru argumentu x oraz przyrostu argumentu Δx . Stosunek ten jest równy nachyleniu wykresu - tangens kąta α między wykresem a osią x : $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \tan \alpha$, gdzie $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ i określa szybkość z jaką zmienia się wartość funkcji w bliskim otoczeniu danego punktu.

Pochodna funkcji w punkcie jest więc nachyleniem stycznej (prostej o równaniu $ax + b$) do wykresu funkcji w tym punkcie. Pochodną funkcji możemy czasami wyliczyć analitycznie (ze wzoru 1 oraz innych wzorów na jego podstawie) jeżeli znamy przepis w postaci $y = f(x)$ (kurs matematyki).

3 Numeryczna pochodna funkcji

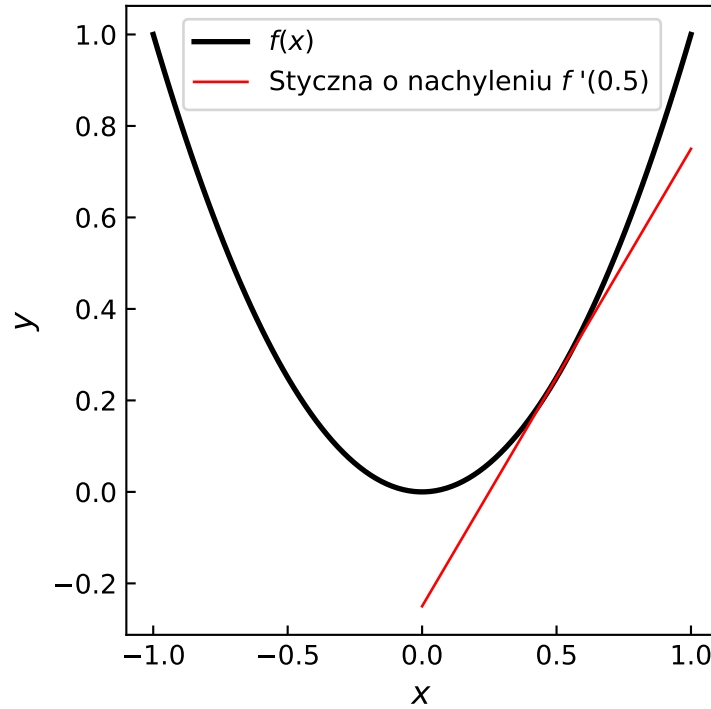
W przypadku operowania na wartościach liczbowych (np. w komputerze) nie jesteśmy w stanie zadać nieskończenie małego przyrostu argumentu Δx .



Rysunek 1: Funkcja $f(x) = x^2$

W przypadkach gdy mamy do czynienia z nieskończenie dużą (∞) wartością, możemy rozważyć przybliżenie tej wartości skończoną wartością "wystarczająco" dużą. W naszym przypadku nieskończenie duża wartość to $1/\Delta x$, która dla $\Delta x = 0^+$ daje $+\infty$. Wartość "wystarczająca" jest zależna od rodzaju problemu oraz od zakładanej dokładności przybliżenia.

Przybliżenie wartości pochodnej za pomocą wartości funkcji w kilku punktach nazywamy *ilorazami różnicowymi*. Są one wyprowadzane z szeregu Taylora, jednak w tym momencie (do operowania z ilorazem różnicowym w przód) wystarczy nam wzór 1. Dla dowolnego Δx możemy zapisać $f'(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + R(\Delta x, x)$ - wartość pochodnej jest równa sumie nachylenia prostej przechodzącej przez punkty $A = (x, f(x))$ oraz $B = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ i wartości $R(\Delta x, x)$ zależnej od wyboru Δx , funkcji oraz punktu w którym liczymy pochodną. Nie znamy wartości $R(\Delta x, x)$, jednak wiemy (z wyprowadzenia z szeregu Taylora) jakiego rzędu są to wartości. Jeżeli zaniedbamy wartość $R(\Delta x, x)$, otrzymamy przybliżenie pochod-



Rysunek 2: Interpretacja graficzna pochodnej funkcji $f(x)$

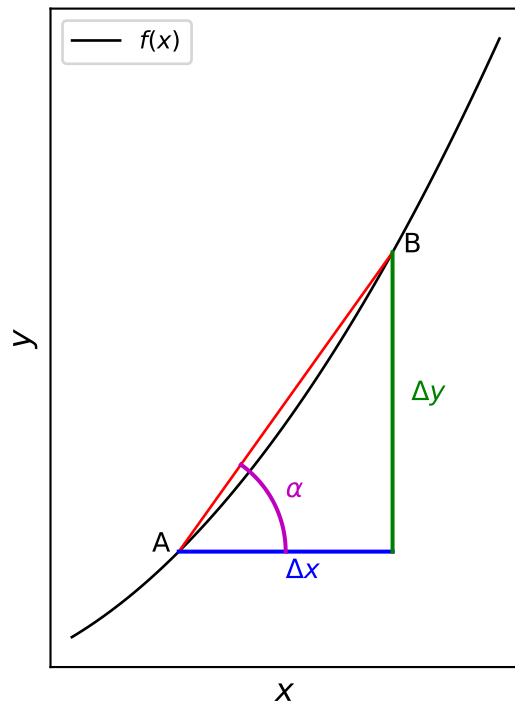
nej w dokładnością $R(\Delta x, x)$ (to znaczy wartość przybliżona będzie różna od dokładnej o $R(\Delta x, x)$). Czyli przybliżenie numeryczne pochodnej przyjmuje postać:

$$f'(x) \approx f'_{num} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (2)$$

a błąd przybliżenia:

$$R(x, \Delta x) = f'(x) - f'_{num}, \quad (3)$$

W tym momencie Δx oznacza dowolną dobraną przez nas wartość, a przepis 2 nazywamy ilorazem różnicowym w przód. Rząd wielkości błędu w przypadku jego stosowania jest równy rządowi wielkości Δx co zapisujemy $O(\Delta x)$ i możemy spodziewać się błędu przybliżenia równego $C\Delta x$, gdzie C jest skończoną wartością (różną od $\pm\infty$).



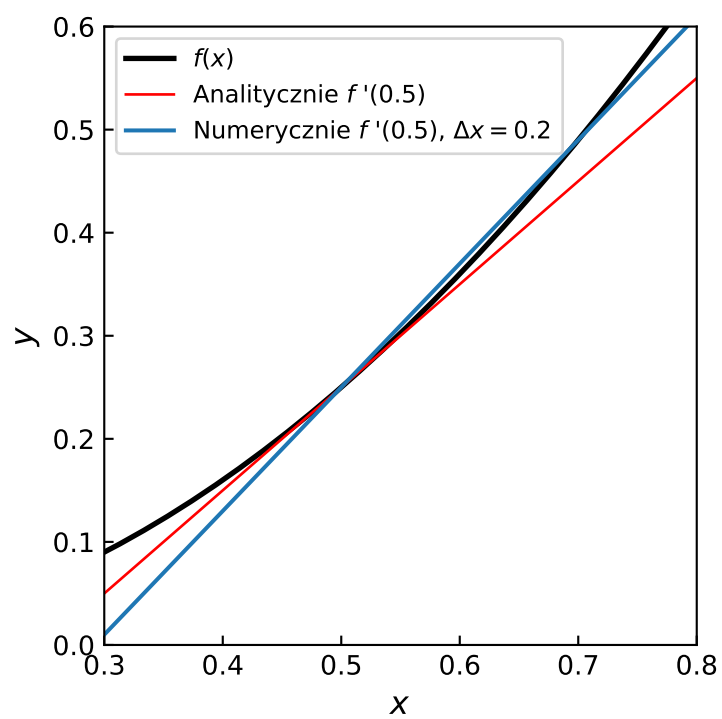
Rysunek 3: Interpretacja graficzna ilorazu różnicowego w przód

Dlaczego numeryczna pochodna?

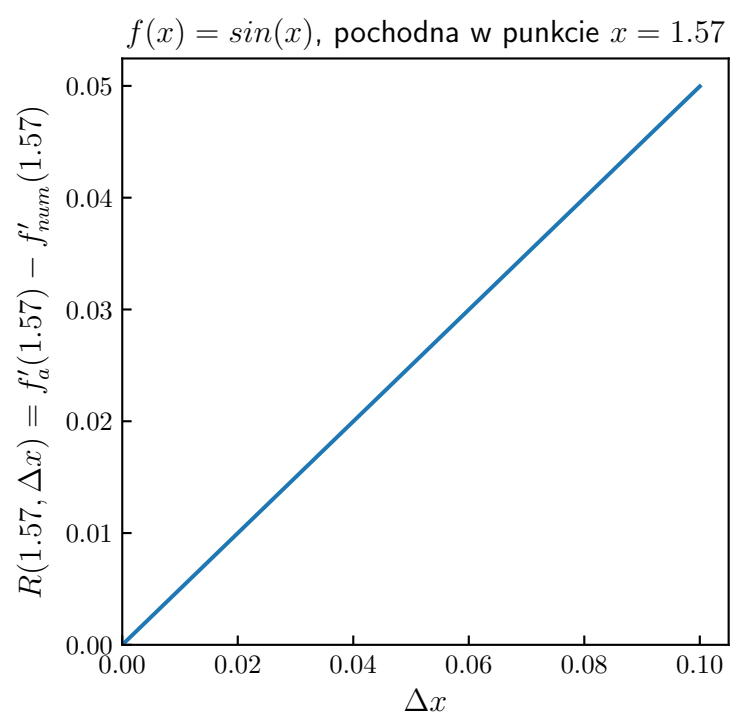
Z ilorazów różnicowych korzystamy najczęściej wtedy, gdy nie znamy analitycznego przepisu na funkcję $f(x)$.

Dlaczego nie zawsze używamy najmniejszego możliwego Δx ?

Nie zawsze mamy taką możliwość, wartości funkcji mogą być dane z eksperymentu (doświadczalne) albo z obliczeń numerycznych.



Rysunek 4: Różnica pochodnej numerycznej oraz analitycznej w punkcie 0.5 (różnica nachylenia prostych)



Rysunek 5: Błąd przybliżenia pochodnej w zależności od Δx